Testo letto da Proverbio per tutti e due il 25/4/81 a Montecatini.

ASTRONOMIA DI POSIZIONE E GEOMETRIA DELLO SPAZIO

Carlo Felice Manara*, Edoardo Proverbio**
*Istituto Matematico dell'Università, Milano
**Istituto di Astronomia dell'Università, Cagliari

1. - Matematizzazione e linguaggio della scienza

1.1 L'argomento "Astronomia di posizione e geometria dello spazio", inserito nella discussione sulla didattica della matematica, può essere inquadrato ragionevolmente - a parere di chi scrive - nel grande argomento della matematizzazione della realtà. In altre parole, le osservazioni sui moti degli astri,della sfera celeste e dei pianeti, possono costituire uno stimolo efficace per la costruzione della geometria dello spazio; ed in questo ordine di idee la geometria può essere considerata come il 'primo capitolo della fisica', cioé come il primo passo verso la matematizzazione della esperienza sensibile. Invero, in certo senso, la geometria dello spazio fisico può essere considerata come una dottrina che razionalizza le nostre esperienze sui corpi rigidi, almeno per quanto riguarda la loro mutua posizione e la loro forma; e quindi i postulati della geometria classica (euclidea) potrebbero essere considerati come delle ipotesi iniziali, dei 'principi' secondo la visione classica, che sono fondati su una evidenza sperimentale accettata come di valore assoluto, e che a loro volta fondano tutta la costruzione teorica successiva, che costituisce una spiegazione razionale delle proprietà geometriche dei corpi. Inoltre i contenuti offerti dalle osservazioni e dalla astronomia di posizione debbono poter servire anche come stimolo per un passo ulteriore, al di là della geometrizzazione della realtà, e cioé per la costruzione e lo studio di quegli strumenti matematici che sono fondamentali per ogni operazione di matematizzazione della realtà sensibile. A nostro parere infatti uno dei problemi didattici fondamentali della matematica potrebbe essere formulato dicendo che, ad ogni fase dello sviluppo intellettuale del discente, deve corrispondere un insegnamento ad un tale livello di astrazione e di rigore che il discente stesso sia stimolato non soltanto all'impiego del linguaggio matematico per conoscere certi contenuti, ma anche allo studio degli strumenti matematici presi in sé, perché può costatare direttamente la potenza e la fecondità degli strumenti concettuali e formali che la matematica gli offre per la conoscenza della realtà; in modo che da questa constatata potenza e fecondità il discente sia indotto anche all'apprendimento rigoroso del linguaggio matematico fatto oggetto di studio a sè stante.

In questo ordine di idee si può pensare che l'apprendimento della matematica, intesa come linguaggio fondamentale della conoscenza scientifica, debba in qualche modo seguire le stesse fasi dell'apprendimento di una lingua comune, per esempio della lingua materna: ad una prima fase di apprendimento, nella quale la lingua viene usata per imitazione, e nella pratica quotidiana delle necessità della vita e delle relazioni elementari della società, segue una fase nella quale la lingua stessa diventa oggetto di studio, nella sua morfologia e nella sua sintassi. In questo modo il discente prende coscienza del fatto che egli non soltanto riesce ad esprimere le proprie idee con maggiore chiarezza e precisione, ma riesce anche ad avere un maggiore numero di idee. Sarebbe invece a nostro parere contestabile uno studio della lingua che, come primo passo, facesse la lingua stessa oggetto di studio, senza che la costatazione delle possibilità espressive legate all'uso della lingua, come mezzo di conoscenza e di interpretazione del mondo esterno, giustifichi la fatica e l'impegno dell'apprendimento.

Pensiamo che si possano ripetere delle considerazioni analoghe per quanto riguarda lo studio della matematica, almeno-ripetiamo- nel suo spetto di linguaggio della scienza. E' tuttavia da ricordare il fatto che in generale il linguaggio matematico é privo di ridondanze, ha una precisione molto superiore a quella del linguaggio comune, e permette delle deduzione rigorose, che si riducono spesso a delle manovre sui simboli secondo leggi formali, e cioé a dei calcoli. E queste circostanze rendono l'insegnamento della matematica spesso più gravoso di quello del linguaggio letterario, ma ne fondano anche il valore formativo, come stimolo alla astrazione ed alla concettualizzazione chiara,precisa senza sbavature, ed alla deduzione coerente e rigorosa.

L'evoluzione storica del progresso mostra i successi del metodo matematico, e del linguaggio matematico adottato come linguaggio principale della scienza; e proprio in questa evoluzione storica si possono trovare numerosi spunti didattici stimolanti.

1.2 E' un luogo comune che la geometria e l'astronomia siano fra le scienze, le più antiche. E' questione invece più discussa quella che riguarda i motivi per i quali queste due scienze siano emerse ed abbiano poi avuto sin dai tempi più remoti quel grandioso sviluppo, ancora in atto. Personalmente, siamo convinti che la curiosità, come affermava il Bailly nella sua celebre "Storia dell'Astronomia" (1) , ed i problemi strutturali, come sembrano propugnare i più accesi sostenitori dell'approccio assiomatico in campo geometrico, costituiscano una componente fra quelle responsabili della crescita di questa, come di altre scienze, mentre siamo più propensi a ritenere che motivazioni più profonde, di carattere problematico, stiano alla base non solo dell'emergere ma anche della rinascita e delle rivoluzioni che in epoche cruciali hanno caratterizzato lo sviluppo di queste stesse scienze (2). Non é tuttavia questa la sede più adatta per motivare simili opinioni, ci preme invece sviluppare alcune riflessioni, apparentemente estranee alla questione posta, in merito allo stretto legame che, in alcune circostanze storiche di non secondario rilievo, si é manifestato fra i problemi astronomia e modelli e teorie geometriche. L'interesse di questo accostamento é a nostro avviso duplice, poiché se da una parte esso si ricollega in qualche modo direttamente al problema posto in precedenza, riguardante l'origine e lo sviluppo dell'astronomia e della geometria, di notevole rilievo storiografico ed epistemologico, sul quale, ripetiamo, non intendiamo qui soffermarci, dall'altra, la possibilità di mettere in evidenza i nessi esistenti fra problematiche astronomiche e soluzioni geometriche, presenta a nostro avviso interessanti implicazioni di carattere didattico ed interdisciplinare, che si prestano ad individuare nuovi possibili territori di programmazione dell'insegnamento della matematica, ma anche dell'astronomia, nella scuola secondaria superiore.

Possiamo infatti già sin d'ora anticipare che le problematiche astronomiche che saranno prese a pretesto per altrettanti approcci geometrici e che, in altre parole, costituiscono, o hanno costituito, le motivazioni per proporre ed elaborare teorie geometriche, sono tutte contenute nei programmi ministeriali della scuola secondaria superiore. La stessa definizione di "astronomia matematica", con la quale i programmi di astronomia sono presentati nella scuola secondaria, nella misura in cui riflette una visione assai riduttiva dell'astronomia, costituisce una conferma, a livello semantico, dell'esistenza di una con nessione non marginale fra alcune aree della conoscenza astronomica e modelli e sviluppi matematici e geometrici.

2. - Geometria ed astronomia: storia di una relazione

2.1 Lo sviluppo dell'astronomia nell'antichità, le cui fasi iniziali si possono identificare con l'emergere della civiltà babilonese, é essenzialmente basato sulla definizione empirica di relazioni fra diversi fenomeni astronomici periodici, legati al moto della Luna ed al moto apparente del Sole, e sulla istituzione di un sistema preciso di riferimento sulla sfera celeste, rispetto al quale potessero essere riferite le posizioni delle stelle e degli altri corpi celesti, e definiti i movimenti di questi stessi corpi per mezzo di teorie e modelli matematici. L'elaborazione di questi ultimi e lo sviluppo della matematica e dell'algebra babilonese appaiono strettamente connesse con motivazioni e problematiche di carattere astronomico. Lo stesso successivo sviluppo della geometria euclidea e archimedea in Grecia é stato largamente influenzato da problemi di carattere numerico e grafico la cui origine non é difficile da individuare in una serie di quesiti e di sollecitazioni di derivazione astronomica (3). L'ampio sviluppo di queste tecniche e di algoritmi geometrici e matematici per la soluzione di problemi astronomici costituisce anzi il dato peculiare di un aspetto del concetto di "matematizzazione" dei fenomeni naturali come si era sviluppato nella scienza greca ed alessandriana. Aspetto che si identifica con lo sforzo dei filosofi naturalisti, dagli Ionici, fino ad Eudosso, Apollonio, Archimede e Tolomeo di rendere ragione, di spiegare l'essenza delle cose, enunciando delle ipotesi sulla costituzione del mondo, che fondasse attraverso il procedimento deduttivo, la spiegazione delle cose stesse.

L'altro aspetto, di origine pitagorica, pone invece l'idea stessa di numero e di figura geometrica come fondamento della realtà oggettiva e tende quindi a considerare la matematica e la geometria non come uno strumento per interpretare la natura ma come la sostanza della stessa realtà naturale. Se riteniamo infatti valido l'imperativo fondamentale della scienza greca, secondo la quale ogni teoria deve "sozein tà fainòmena", cioé rendere ragione delle cose così come appaiono (i fenomeni), bisogna riconoscere che tale imperativo é stato interpretato in modi del tutto opposto dai filosofi naturalisti e da quelle correnti di pensiero che più di altre risentiranno l'influenza della concezioni metafisiche di Platone. L'influsso di queste concezioni è più evidente nel periodo pre-alessandrino ma si ritrova anche successivamente nella misura in cui le applicazioni della matematica e lo sviluppo di nuovi algoritmi matematici venivano praticamente finalizzati per rappresentare i fenomeni, con scarsa preoccupazione in merito alla realtà fisica di questi ultimi. Così, ad esempio, non solo il calcolo delle eclissi era basato su tabelle che fornivano la grandezza delle eclissi mese per mese, quando in realtà questi fenomeni si presentano ad intervalli di 5-6 mesi, ma le stesse tabelle delle eclissi e del moto dei pianeti erano fondate su scarsi elementi osservativi, mentre veniva prestata la più grande attenzione al problema di costruire modelli matematici formalmente corretti (4). Questa tendenza a ridurre il peso dei dati empirici allo stretto indispensabile, se riflette certamente la scarsa attendibilità che veniva allora attribuita ai dati osservati a causa della notevole incertezza di questi ultimi, esprime, come si é detto, un orientamento presente in una parte della scienza greca ed ellenistica. La tendenza cioé ad enfatizzare il metodo deduttivo ed a considerare la dismostrazione matematica più che come linguaggio "della" scienza come linguaggio "nel" quale la scienza dovrebbe in qualche modo riconoscersi.

Malgrado questa tendenza alla formalizzazione dei fenomeni naturali, resta il fatto che, ~~come si é detto~~, in epoca ellenistica l'affermarsi di metodi matematici e geometrici appare quasi sempre associato alla soluzione di problemi di ordine pratico . Ciò é particolarmente interessante per quanto riguarda i nessi fra problematiche astronomiche e lo sviluppo di teorie geometriche. Ed é su questi accostamenti che riteniamo opportuno attirare l'attenzione anche per il valore didattico e metodologico che attribuiamo a questo tipo di approccio alla geometria, con particolare riferimento ai programmi di insegnamento della scuola secondaria superiore.

2.2 Speciale importanza i problemi astronomici hanno avuto come stimolo allo sviluppo della geometria sferica e della geometria descrittiva (5). E' tuttavia necessario segnalare che nel periodo ellenistico e nella astronomia alessandrina buona parte dei problemi che oggi afferiscono alla geometria dello spazio erano ridotti a problemi piani mediante una oculata combinazione di elementi di geometria descrittiva e proiettiva e di metodi trigonometrici. La trigonometria piana, di derivazione babilonese, era essenzialmente basata sull'impiego di tavole dalle corde che sottendono ad un dato angolo in un cerchio di raggio unitario, invece che sull'uso di funzioni trigonometriche la cui introduzione avvenne molto più tardi (6). Il legame tra le due funzioni si ha dalla relazione (fig. 1)

$$\mathrm{crd}\ 2x = 2a/c \qquad \sin x = a/c \qquad (c=1)$$

da cui si deduce

$$\mathrm{crd}\ 2x = 2 \sin x.$$

Nell'Almagesto, Tolomeo (II sec. d.C.) calcola una tavola delle corde di mezzo in mezzo grado facendo ricorso alle relazioni

$$s_n = \mathrm{crd}\ y_n = \mathrm{crd}\ (360/n)$$

$$s'_n = \mathrm{crd}\ (180 - y_n) = (4\ c^2 - s_n^2)^{1/2}$$

che legano il lato s_n di un poligono regolare all'angolo al centro (fig. 1), e ad un importante teorema sui quadrilateri iscritti in un cerchio che permette di trovare il valore di crd $(x + z)$ e di crd $(x/2)$ (7).

Facendo uso di questo algoritmo e della teoria degli epicicli, sviluppata da Apollonio (267? - 190?) proprio per spiegare il moto irregolare della Luna e del Sole, ma soprattutto dei pianeti, Tolomeo costruì, come é noto, un modello geometrico dell'universo che costituì, sino a Copernico, un punto di riferimento anche per i successivi sviluppi dell'astronomia araba.

E' facile osservare che la teoria degli epicicli che sta a fondamento del modello Tolomeico, richiede essenzialmente l'uso di tavole trigonometriche e la conoscenza della geometria del cerchio e della sfera su cui torneremmo fra breve (8). Se riferiamo i movimenti dei corpi celesti ad un sistema di coordinate eclittiche geocentriche (fig. 2), usate da Tolomeo, ma già note ai babilonesi a cui risale la scoperta dello Zodiaco (prima del IV sec. a.C.), si ha, con notazioni moderne, per le coordinate ortogonali di un punto P_2 che ruota con velocità uniforme attorno ad un centro P_1, pure esso mobile con moto regolare lungo una circonferenza:

$x_2 = r_1 \cos v_1 + r_2 \cos v_2 \qquad y_2 = r_1 \sin v_1 + r_2 \sin v_2$

in cui r_1 ed r_2 sono rispettivamente i raggi del cerchio deferente e dell'epiciclo, mentre,

$v_1 = v_{0,1} + n_1 (t - t_o) \qquad v_2 = v_{0,2} + n_2 (t - t_o)$,

sono le anomalie vere, espresse in funzione dei moti medi n e del tempo t. Le coordinate polari di P_2 sono invece date dalle espressioni:

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos (v_2 - v_1),$$

$$\sin (v - v_1) = - \frac{r_2}{r} \sin (v_2 - v_1) .$$

Le quali esprimono moti generalissimi, che si riducono, come é facile osservare, anche a traiettorie ellittiche se si pone $v_1 = - v_2$.

La teoria di queste ultime curve, e cioé delle sezioni coniche, sviluppata nell'antichità da Eudosso (408? - 355) e da Menecmo (c. 350 a.C.) discepolo di Platone, e che trova completa sistemazione nell'opera di Apollonio, ebbe origine invece dallo studio delle curve generate dalla proiezione dell'ombra del Sole su una superficie piana e cioé dallo studio degli orologi solari (9). Questa teoria ebbe inoltre stretti legami sia con l'"algebra geometrica" così come essa si presentava all'epoca di Archimede e di Apollonio, sia con altre importanti applicazioni astronomiche. In particolare la teoria delle sezioni coniche presenta stretti collegamenti, come conseguenza di un teorema provato da Appollonio (10), con la teoria delle proiezioni stereografiche di cerchi sulla sfera in cerchi sul piano, che tanta importanza riveste nella progettazione e costruzione di astrolabi, e cioé degli strumenti più versatili conosciuti nell'antichità ed usati per la determinazione delle distanze angolari di oggetti celesti e terrestri dall'orizzonte o dallo zenit, per il calcolo della posizione del Sole e delle stelle rispetto al meridiano ed all'orizzonte e per la determinazione della latitudine e dell'ora.

Il metodo delle proiezioni stereografiche, attribuito ad Ipparco ed usato da Tolomeo nel suo "Planisphaerium", assume grande importanza storica e didattica, poiché costituì in un'epoca in cui la trigonometria sferica era sconosciuta, l'unico mezzo per risolvere i problemi sferici.

Ad un livello qualitativo la geometria della sfera era stata già studiata da Eudosso e nel IV sec. a.C., mentre Euclide ed Autolico affrontarono in modo abbastanza primitivo problemi di astronomia sferica. Solo successivamente tuttavia, con l'introduzione dei concetti di coordinate e di sistemi di coordinate celesti si apre la possibilità di risolvere direttamente i problemi sferici, che così grande rilievo presentano in astronomia sferica. Alla base di questi sviluppi sta un teorema dimostrato da Menelao (c. 100 d.C.) - il quale stabilì per primo che la geometria sferica doveva essere basata sulla considerazione di archi di cerchio massimo - riportato nell'Almagesto di Tolomeo. Si rese così possibile risolvere importanti problemi di trasformazione delle coordinate. Sulla sfera celeste infatti, sempre con le notazioni attuali, gli elementi del triangolo sferico SP_iP_j, nel quale S é la posizione dell'astro osservato e P_i, P_j sono i poli dei cerchi massimi di riferimento C_i e C_j (fig. 3), sono legati dalle seguenti semplici relazioni trigonometriche:

$$\cos d_j = \cos d_i \cos l_{ij} + \sin d_i \sin l_{ij} \cos L_i,$$
$$\sin d_j \cos L_j = \cos d_i \sin l_{ij} - \sin d_i \cos l_{ij} \cos L_i,$$
$$\sin d_j \sin L_j = \sin d_i \sin L_i.$$

Come si é già detto, oltre alle coordinate sferiche orizzontali riferite all'orizzonte ed allo zenit, già all'epoca di Ipparco erano usate le coordinate equatoriali, riferite all'equatore ed al polo Nord celeste, e le coordinate eclittiche, riferite invece all'eclittica ed al polo boreale di quest'ultima. Accanto a questi sistemi altrettanto antico é il sistema cosiddetto di coordinate orarie. I piani di riferimento fondamentali, fra loro ortogonali, di questi sistemi sono così rappresentati:

Sistema di riferimento	Piani di riferimento fondamentali	
Orizzontale	Orizzontale	Meridiano
Orario	Equatore	Meridiano
Equatoriale	Equatore	Cerchio orario per gli equinozi
Eclittico	Eclittica	Coluro per gli equinozi

Con riferimento a questi piani é possibile definire poi le coordinate sferiche di un punto S della sfera celeste. Il nome della coordinata ed il valore che assumono gli elementi d ed L del generico triangolo sferico SP_iP_j in funzione di queste stesse coordinate, risultano:

Sistema di riferimento	Coordinate sferiche	d	L	l_{ij}
Orizzontale	z=distanza zenitale A=azimut	z	180-A	90-φ
Orario	d=distanza polare H=angolo orario	d	H	
Equatoriale	d=distanza polare α=ascensione retta	d	90+α	ε
Eclittico	e=distanza polare λ=longitudine	e	90-λ	

I parametri φ ed ε necessari per permettere la trasformazione reciproca delle coordinate orizzontali ed orarie e delle coordinate equatoriali ed eclittiche, sono semplicemente la latitudine astronomica del luogo di osservazione e l'obliquità dell'eclittica. Il passaggio infine dalle coordinate orarie a quelle equatoriali e viceversa é retto dalla semplice relazione $t = H + \alpha$, essendo t il tempo siderale, definito anche come angolo orario dell'equinozio di primavera.

3. - Geometria e astronomia; proposte didattiche

3.1 Lo stretto legame operativo che sussiste fra concetti e problemi astronomici e geometrici, suggerisce, a nostro avviso, nell'ambito della geometria euclidea, alcune proposte didattiche al livello della scuola secondaria che tenteremo qui di delineare (11). Come si é visto, l'osservazione dei fenomeni astronomici può fornire molte e fondamentali occasioni per la spiegazione scientifica della realtà. In questo ordine di idee - ripetiamo - la geometria ci si presenta quindi come il primo momento della spiegazione, una prima schematizzazione del cosmo, operata a livello geometrico. Questa 'spiegazione' del mondo fisico, per esempio quella che Euclide dà con i suoi postulati, cioé con le ipotesi fondamentali della sua geometria può condurre, e conduce di fatto storicamente, ad una ulteriore analisi quantitativa dei fenomeni. Rimane pertanto solo un ulteriore facile passo da compiere per passare dalla spiegazione puramente geometrica alla descrizione delle cose che viene fatta mediante i numeri, attraverso la operazione di misura.

Sempre seguendo lo stesso ordine di idee, la figura elementare costituita dalla superficie sferica (che nel seguito indicheremo brevemente col vocabolo 'sfera') fornisce un primo oggetto di attenzione e di studio. A titolo puramente esemplificativo potremmo citare gli argomenti che riguardano i poligono sferici (in particolare i triangoli sferici) ed i problemi che si connettono ad essi. In questo campo numerosi sono gli spunti didattici che l'insegnante potrebbe identificare ed utilizzare, e ci limitiamo qui ad indicarne alcuni.

Anzitutto la osservazione del fatto che la superficie sulla quale noi viviamo non é un piano; e quindi che quella superficie piana, che ci appare come la superficie più semplice ed elementare, in forza di una elaborazione fantastica della realtà sperimentale, non é affatto la superficie sulla quale ci accade di dover realmente vivere e operare. Da questa costatazione si potrebbe passare alle considerazioni riguardanti la similitudine, la esistenza di una unità di misura 'naturale' per le lunghezze nel caso della sfera (ed il relativo collegamento storico con la vicenda della definizione del metro) e l'insieme dei problemi riguardanti la rappresentazione piana, o su superfici che si sviluppano su un piano, di una sfera, con le rilevanti applicazioni geodetiche e cartografiche ed i problemi di proiezione stereografica, i cui rislutati astronomici riguardanti in particolare la teoria degli orologi solari e dell'astrolabio sono stati illustrati in precedenza. A questi temi si potrebbero collegare problemi (di conciliazione tra esigenze pratiche e opportunità di conservazione di certe proprietà. Riteniamo inoltre che un approccio geometrico che vada al di là della geometria dell'uguaglianza e della similitudine e che affronti, sia pure in modo elementare, lo studio delle proprietà proiettive delle figure geometriche del piano e della sfera trovi abbondanti agganci in altri campi dell'insegnamento (si pensi all'importanza dell'uso della proiettività per una piena comprensione dell'arte rinascimentale (12)). In generale, si potrebbe dire che il confronto del piano con la sfera potrebbe dare occasione a tutta una gamma di spunti didattici, e condurre ad analizzare e ad approfondire l'analisi dei punti di partenza e del significato della costruzione della geometria delle due superfici.

Collegati con i problemi della rappresentazione della sfera sono, come si é detto, anche i problemi che riguardano la proiezione, e questa operazione é strettamente collegata col problema della definizione e dello studio delle coniche sulla cui importanza astronomica pensiamo sia superfluo insistere.

3.2 Dagli argomenti a cui abbiamo brevemente accennato si può passare facilmente a quelli che riguardano più genericamente la rappresentazione della realtà con l'impiego del linguaggio matematico. In questo campo l'operazione fondamentale é quella della misura delle grandezze. Un approccio geometrico della teoria della misura costituisce a nostro avviso una via di notevole valore euristico per una più profonda comprensione del significato dei processi di "matematizzazione" come punto di equilibrio fra la necessità del "rigore matematico" e quella della "approssimazione fisica". In questo ordine di idee gli argomenti tratti dalla astronomia di posizione possono offrire numerose occasioni per far notare la precisione e la fecondità degli strumenti offerti dalla matematica; addirittura possono aiutare a far capire come non si potrebbe dare, spesso, alcuna conoscenza scientifica che prescinda dalla matematica. E permettono inoltre di far capire come gli strumenti matematici si inseriscano nel procedimento tipico fondamentale della scienza moderna, procedimento costituito dal continuo ciclo formato dalla formulazione di ipotesi, dalla deduzione, dalla conferma o falsificazione sperimentale, dallo stimolo alla formulazione di ulteriori ipotesi.

In questo campo si presentano numerose le occasioni per l'impiego delle convenzioni della geometria analitica, e degli sviluppi della trigonometria piana e sferica(3). In tal modo queste dottrine ceserebbero di avere il carattere di insiemi di formule astratte e poco motivate, ma potrebbero acquistare l'aspetto di procedimenti molto semplici per rappresentare con numeri e con formule le relazioni e le proprietà degli enti della geometria, e per risolvere i problemi di questa scienza. Pure su questa linea si pongono i problemi riguardanti i sistemi di coordinate ed i cambiamenti dei sistemi di riferimento; i problemi collegati con quelli della ricerca di invarianti e quindi di proprietà obbiettive delle realtà osservate, indipendentemente dalle diverse circostanze nelle quali si trova l'osservatore o delle diverse convenzioni adottate da questi.

E qui si potrebbe offrire la possibilità di osservare che le diversità di collocazione dell'osservatore possono essere utilizzate e messe a profitto per le misure, come avviene per esempio nel caso della parallasse per misurare la distanza dei corpi celesti.

Infine l'astronomia di osservazione può offrire un campo di considerazioni molto feconde a proposito del significato delle leggi fisiche e dei procedimenti che conducono alla loro formulazione. Si hanno infatti numerose occasioni per analizzare il significato della precisione delle osservazioni, il significato degli errori e dei procedimenti teorici per minimizzare gli errori. Collegati con questi argomenti sono anche quelli che si riattaccano alle operazioni con numeri approssimati, ed al significato delle informazioni che ci sono offerte dalle operazioni su numeri cosiffatti. Nello stesso ordine di idee entrano le considerazioni che si ricollegano alle operazioni di interpolazione (con le applicazioni degli sviluppi in serie) e di calcolo, con valori forniti dalle tavole numeriche o dalle macchine.

La storia delle vicende della scienza fisico-matematica può fornire molti spunti didattici per l'insegnamento della matematica e della fisica. Infatti sarebbe forse un poco imprudente liquidare le teorie dei secoli scorsi come 'sbagliate' o 'superate'; invero lo studio della storia del pensiero scientifico offre spunti di meditazione sul vero significato della conoscenza scientifica e sui suoi successi, ed anche sui suoi limiti.

Per concludere ci pare che l'idea di collegare in qualche modo l'insegnamento della geometria a concetti e fenomeni di carattere astronomico possa costituire, non solo dal punto di vista storico, un significativo punto di riferimento per sviluppare proposte di itinerari didattici nuovi nell'insegnamento della matematica.

Note e riferimenti bibliografici

(1) Bailly J.S., La storia dell'astronomia, Bassano, Remondini, 1791.

(2) Su questo tema si veda l'interessante intervento di F.E. Browder in Proced. of the American Academy Workshop on the Evolution of Modern Mathematics (Boston, Mass., 1974).

(3) Ampi riferimenti agli stimoli che l'astronomia ha avuto nello sviluppo della matematica greca ed alessandriana sono dati nel volume di O. Neugebauer, The exact Sciences in Antiquity, Dover Public. New York, 1969, (trad. it., Le scienze esatte nell'antichità, Feltrinelli, 1975).

(4) Un esempio della maggiore confidenza che gli antichi assegnavano ai dati calcolati rispetto a quelli dedotti dagli strumenti di osservazione é dato dal fatto che anche Tolomeo determinava le coordinate eclittiche delle stelle con riferimento alla posizione della Luna, la cui longitudine veniva dedotta direttamente dalla teoria del moto (cfr. Neugebauer, The excat sciences in antiquity, p. 185).

(5) Cfr. in particolare l'opera citata di Neugebauer e, dello stesso autore: A History of Ancient Mathematical Astronomy (Three parts), Springer-Verlag, 1975.

(6) Le funzioni seno e coseno vennero introdotte dall'astronomo indiano Aryalhatta (nato 476 d.C.), quelle di tangente e contangente dall'arabo Alhabas (770-870?), che le usò per la determinazione della lunghezza dell'ombra di uno gnomone.

(7) Cfr. Neugebauer, A History of Ancient Mathematical Astronomy, p. 22.

(8) Nell'Almagesto di Tolomeo sono date molte interessanti applicazioni della trigonometria piana alla soluzione di complessi problemi astronomici, come ad esempio il problema di trovare la lunghezza del raggio dell'epiciclo lunare e la posizione dell'apogeo dell'orbita della Luna (Cfr. Neugebauer, A History of Ancient Mathematical Astronomy, pag. 210-214).

(9) Cfr. Neugebauer, The excat Sciences in Antiquity, p. 218, Si veda anche dello stesso autore: On the Astronomical origin of the theory of Conic Sections, Proc. Amer Philos. Soc., 92, 1948, pag. 136-138. Secondo Neugebauer la teoria degli orologi solari è probabilmente all'origine anche di uno dei classici problemi della matematica greca e cioé del problema della trisezione degli angoli.

(10) Appollonio, Coniques, par Paul Ver Eecke, Blanchard, Paris, 1959, p.9.

(11) Ci pare opportuno segnalare che anche nell'ambito della geometria non euclidea esistono importanti connessioni fra strutture geometriche e fenomeni astronomici. Basta pensare ai moderni problemi cosmologici ed allo stretto legame che la relatività assegna alla geometria ed alla fisica dello spazio.

(13) I fondamenti di trigonometria piana e sferica sono stati sostanzialmente basati in epoca alessandriana sui teoremi di Tolomeo e di Menelao che presentano ancora oggi indubbio interesse didattico.

(12) Un interessante approccio agli stimoli ed alle applicazioni della geometria proiettiva in epoca rinascimentale si trova in M. Kleine, Mathematics in Western Culture, Oxford Univ. Press, 1953 (trad. it. , La matematica nella cultura occidentale, Feltrinelli, 1976). In particolare si vedono il Cap. X (Pittura e prospettiva) ed il Cap. XI (Una scienza figlia dell'arte: la geometria proiettiva).

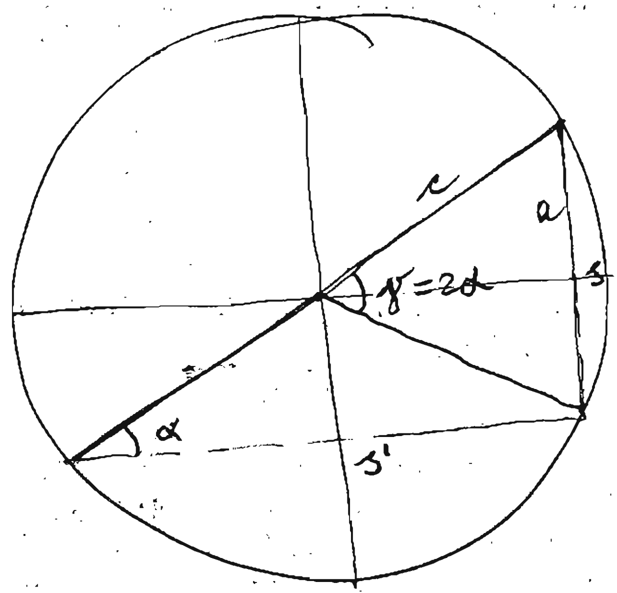
c
a
$\gamma=2\alpha$
s
α
s'

Fig 1

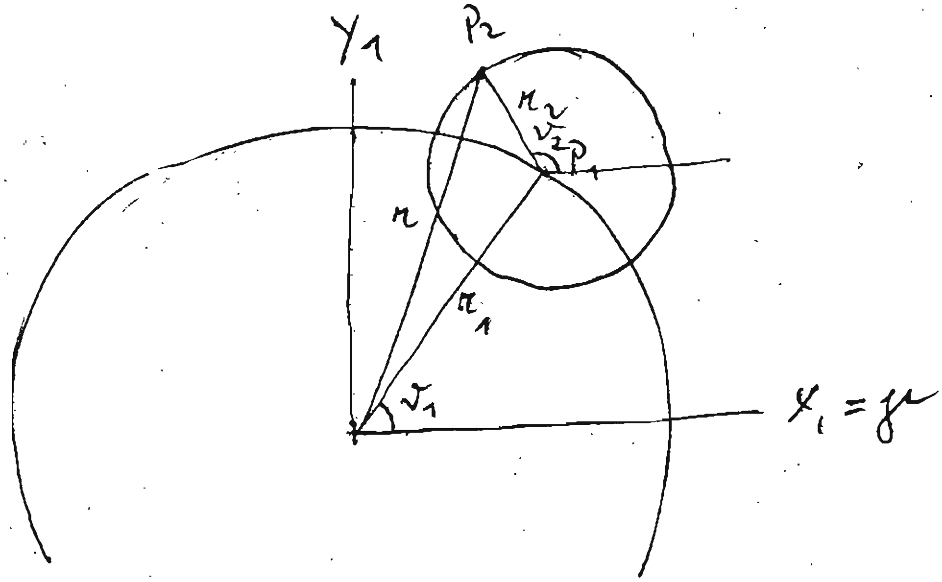
Y_1
P_2
r_2
ϑ_2
P_1
r
r_1
ϑ_1
$X_1 = \gamma$

Fig 2

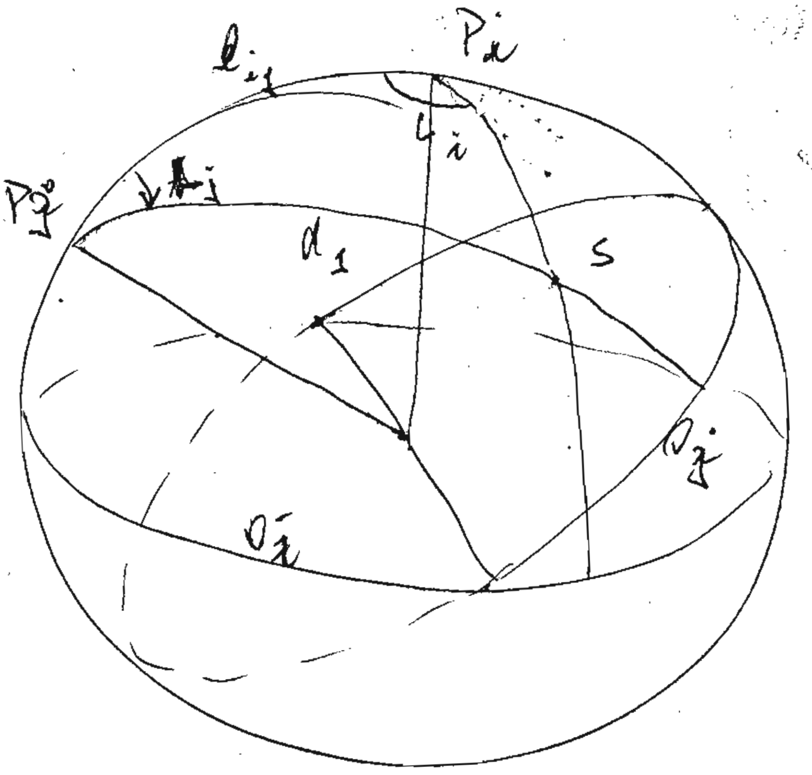

Fig. 3